

НАУЧНАЯ ТРОПА ИННОПОЛИСА

Математика негладкого мира

Как продифференцировать то, у чего нет производной?

Классический анализ молча считает мир гладким: производную берут там, где функция плавная, без изломов и скачков. Но настоящий мир щербат. Землетрясение, ударная волна, фронт горения, точечный заряд — это разрывы, в точке которых обычной производной просто нет. А отмахнуться от них нельзя: именно разрывные решения волнового уравнения позволяют читать недра Земли по сейсмическим волнам. Уйти от гладкости было не прихотью, а физической необходимостью.

Этот шаг сделал Сергей Соболев — основатель и первый директор Института математики в новосибирском Академгородке. Он расширил само понятие производной так, чтобы дифференцировать можно было и скачок. Простейший пример — «ступенька» Хевисайда: функция, равная 0 слева от точки и 1 справа. В точке скачка наклон бесконечен, классической производной нет. А в смысле Соболева её производная — это идеальный точечный импульс ровно в месте скачка.

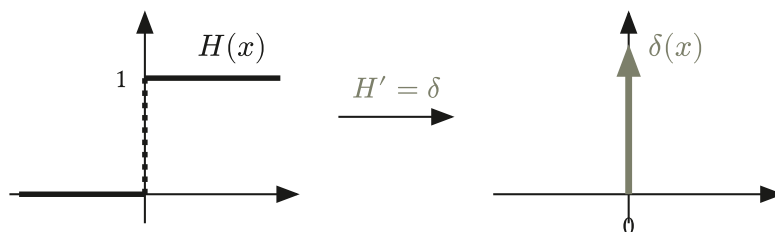


Рис. 1. Ступенька Хевисайда скачком переходит с 0 на 1; её обобщённая производная — дельта-импульс Дирака: бесконечно узкий и высокий пик ровно в точке скачка.

Как вообще можно строго определить «производную скачка»? Через хитрый обходной манёвр.